DOI:10.16262/j.cnki.1000-8217.1998.03.015

·成果简介·

线性与非线性次椭圆方程理论研究的若干新进展

徐超江*

（武汉大学数学研究所，武汉 430072）

［关键词］ Carnot-Carathéodory 流形，调和映照，Sobolev 嵌入，集中紧致原理，Yamabe 问题

线性次椭圆算子理论的研究已有 30 多年历史，是偏微分方程微局部分析理论的一个重要分支，先后有一大批著名数学家研究过这一理论。随着研究的深入，人们将注意力转向了相应的 Carnot-Carathéodory 几何理论，以及相应的非线性偏微分方程理论。近 3 年来，我们在非线性次椭圆方程以及相应的几何分析理论的研究方面取得了一系列重要结果。首先研究的是从一个 Carnot-Carathéodory（C-C）流形到一个 Riemann 流形的次椭圆调和映照。因为由相应的变分问题导出的 Lagrange 方程组是一个退化的次椭圆拟线性方程组，我们得到了与经典情形类似的存在性与正则性结果。但由于方程是退化椭圆的，我们使用的方法与经典的完全不同。与此相连系的是 C-C 流形上的相应的“带权”Sobolev 空间的 L^p 的嵌入问题，我们也证明了类似经典情形的结果。但是由于现在的函数空间是各向异性的，因此我们的证明要用到高阶微局部分析理论，即所谓的 Weyl-Hörmander 象征运算理论。接下来我们研究了 C-C 流形上的半线性带临界指标的次椭圆方程，为了证明解的存在性与正则性，我们还研究了相应的集中紧致原理。这 3 个主要的结果，形成了一个系列，对本学科发展有重要的作用，曾在法、德、意等国的国际学术会议上报告过这些工作，得到国际同行关注。下面将简单介绍这些结果，详细表述及证明见文献［1］—［3］。在“国家杰出青年科学基金”的资助下，本人及本人所在课题组还开展了很多相关课题的研究，有关内容请见参考文献［4］—［9］。

1 次椭圆调和映照

我们先给出一些记号和定义：M 是一个 m 维的 Riemann 流形，$X=\{X_1,\cdots,X_l\}$ 是 M 上的一组实光滑向量场，称 X 满足 r 阶的 Hörmander 条件，若：X_1、$\cdots$、X_l 以及它们的直到 r 阶交换子生成切空间的 TM，这时在 M 可以定义一个相应的度量 $\rho(\cdot,\cdot)$，它是退化的，但是有：

$$C_1 d_M(x,y)\leqslant \rho(x,y)\leqslant C_2 d_M(x,y)^{\frac{1}{r}}$$

对所有的 $x,y\in M$，$d_M(x,y)\ll 1$ 成立，这时称(M,ρ)为一个 C-C 流形。这类流形的一个模

---

* 1994 年度国家杰出青年科学基金获得者．

本文于 1997 年 10 月 13 日收到．

型是 Heisenberg 群 H_n,这类流形上的 Laplace 算子就是所谓的 Hörmander 算子:$\Delta_X=\sum_{j=1}^{l}X_j^*X_j$,其中 X_j^* 是一阶线性偏微分算子 X_j 的形式共轭算子。

设 Ω 是 M 的一个有界开区域,$\partial\Omega$ 是光滑的,若在 $\partial\Omega$ 的每一点上都至少有 X 的一个向量场与 $\partial\Omega$ 横截,称 $\partial\Omega$ 关于 X 是非特征的。现在定义 C-C 流形上的 Sobolev 空间(有时也称为带权 Sobolev 空间)。对于 $k\in N$,令

$$H^k(\Omega,X)=\{f\in L^2(\Omega);\quad X_{j_1}\cdots X_{j_i}f\in L^2(\Omega),\ i\leqslant k\}$$

则 $H^k(\Omega,X)$ 是一个 Hilbert 空间。$H_0^k(\Omega,X)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^k(\Omega,X)$ 中的闭包,也是一个 Hilbert 空间。

现在设 N 是一个 n 维的完备 Riemann 流形,$f:M\to N$ 是一个映照,利用 N 的局部坐标 R^n,我们可以定义

$$H^k(\Omega,X;N)=\{f\in L^2(\Omega;N);\quad X_{j_1}\cdots X_{j_i}f\in L^2(\Omega;N),\ i\leqslant k\}$$

对于 N 的一个固定点 P,还可以定义 $H_0^k(\Omega,X;N,P)$。为了简化记号起见,假设 $N=(R^n,d_N)$,其中 $d_N=\gamma_{\alpha\beta}(y)dy^\alpha dy^\beta$,以及 $P=0\in R^n$。

对于 $f\in H^1(\Omega,X;N)$,定义这个映照的能量为

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_\Omega\gamma_{\alpha\beta}(f)X_jf^\alpha X_jf^\beta \tag{1}$$

对于 $\varphi\in H^1(\Omega,X;N)\cap C^0(\bar{\Omega};N)$,令

$$\mathscr{A}=\{f\in H^1(\Omega,X;N);\ f-\varphi\in H_0^1(\Omega,X;N)\}$$

我们证明了下面的定理:

定理 1　假设 N 是一个完备的具非负曲率的 Riemann 流形。X 在 M 上满足 r 阶的 Hörmamder 条件,$\partial\Omega$ 是光滑的以及关于 X 是非特征的,$\varphi\in H^1(\Omega,X;N)\cap C^0(\bar{\Omega};N)$。则变分问题

$$I=\inf\{E(f);f\in\mathscr{A}\}$$

在 $\mathscr{A}$ 中存在极小元,且该极小元是下列 Dirichlet 问题的一个弱解:

$$\begin{cases}\Delta_Xu^\alpha+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X_ju^\beta X_ju^\gamma=0,\quad \alpha=1,\cdots,n\\ u\big|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ 是 Riemann 流形 N 的 Christoffel 符号。此外,$u\in C^\infty(\Omega;N)\cap C^0(\bar{\Omega};N)$。

这一问题的关键点在于证明极小元的正则性,特别是最困难的低阶正则性,我们使用的是"小球套"以及 Poincaré 不等方法[1]。关于高阶正则性见[4]。

2　C-C 流形上的 Sobolev 嵌入定理

在前一问题中我们已定义了 C-C 流形上的 Sobolev 空间 $H^k(\Omega,X)$,现在研究相应的 Sobolev 嵌入定理,为此先定义相应于 X 的齐性维数。在本节中假设 Hörmander 条件中的阶数 $r=2$,并假设 $X_1,\cdots,X_l$ 在 M 的每一点都是线性无关的,记 $Q=l+2(m-l)$,称 Q 为 M 相应于 X 的齐性维数。当 $r>2$ 时也可以给出相应的定义。现在定义 C-C 流形 (M,ρ) 上的 Hölder 空间。对于 $0<\mu<1$,定义

$$C^{0,\mu}(\Omega,X)=\{f\in L^\infty(\Omega);\ [f]_\mu^X=\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)^\mu}<+\infty\}$$

对于 $k\in N$,定义

$$C^{k,\mu}(\Omega,X)=\{f\in C^{0,\mu}(\Omega,X);\ X_{j_1}\cdots X_{j_i}f\in C^{0,\mu}(\Omega,X),i\leqslant k\}$$

$$\mathrm{BMO}(\Omega,X)=\{f\in L^1_{loc}(\Omega);\ \sup_{B\subset\Omega}\int_B|f-f_B|dy<+\infty\}$$

其中,$B=B(x,R)=\{y\in M;\ \rho(x,y)<R\}$, $f_B=\int_B fdy=|B|^{-1}\int_B fdy$

$$\mathrm{BMO}^k(\Omega,X)=\{f\in\mathrm{BMO}(\Omega,X);\ X_{j_1}\cdots X_{j_i}f\in\mathrm{BMO}(\Omega,X),\ i\leqslant k\}$$

$$\mathrm{VMO}^k(\Omega,X)=\{f\in\mathrm{BMO}^k(\Omega,X);\lim_{R\to0}\int_{B(x,R)}|X^Jf(x)-X^Jf(y)|dy=0,|J|\leqslant k,x\in\Omega\}$$

我们证明了下面完整的C-C流形上的Sobolev嵌入定理。

定理2[2] 假设 X 在 M 上满足2阶的Hörmander条件,$\Omega\subset\subset\Omega'$,则下列嵌入都是连续的:

(a) 若 $0<k<\frac{Q}{2}$,则 $H^k(\Omega',X)\subset L^p(\Omega)$,其中 $p=\frac{2Q}{Q-2k}$

(b) 若 M 关于 X 的齐性维数 Q 是偶数,则 $H^{k+\frac{Q}{2}}(\Omega',X)\subset\mathrm{VMO}^k(\Omega,X)$

(c)若 Q 是奇数,则 $H^{k+\frac{Q+1}{2}}(\Omega',X)\subset C^{k,\frac{1}{2}}(\Omega',X)$。

由于 $H_0^k(\Omega,X)\subset H^k(\Omega,X)$,因此上述结论对于 $H_0^k(\Omega,X)$ 都是成立的。在这一定理的证明中,我们用到了Weyl-Hörmander非齐性象征运算,这是因为向量场组 $X_1,\cdots,X_l$ 是各向异性的,函数空间 $H^k(\Omega,X)$ 不能由Fourier变换定义,该空间的元的微局部特性非常明显,所以本质上来说这个函数空间不仅是变化阶的,而且是微局部变化阶的。利用Weyl-Hörmander运算,我们还定义了非整数阶的函数空间 $H^s(\Omega,X)$ 以及相应的Sobolev嵌入定理。

3 集中紧致原理与次椭圆变分原理

有了Sobolev嵌入定理,一个非常自然的问题是下列半线性Dirichlet问题,

$$\begin{cases}\Delta_X u=k(x)+K(x)u^{q^*},\text{在 }\Omega\text{ 上}\\ u>0,\text{在 }\Omega\text{ 上}\\ u=0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases}\tag{3}$$

其中 $q^*=\frac{Q+2}{Q-2}$,因此 $q^*+1=\frac{2Q}{Q-2}$ 为 $H_0^1(\Omega,X)$ 的Sobolev临界指标,Q 为 M 相应于 X 的齐性维数。当我们考虑的是比较特殊的C-C流形时,这可以相应于Yamabe问题。对于系数 k、K,我们作下列假设,首先,k、$K\in C^\infty(\bar\Omega)$ 且存在 $\alpha>0$ 使得任给 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\sum_{i=1}^l\|X_j\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}-\int k(x)\varphi(x)^2dx\geqslant\alpha\sum_{j=1}^l\|X_j\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

以及 $\sup_{x\in\Omega}K(x)>0$。对于 $u\in H_0^1(\Omega,X)$,令

$$\psi(u)=\sum_{j=1}^l\|X_ju\|^2_{L^2(\Omega)}-\int k(x)u(x)^2dx,\ J(u)=\int K(x)|u|^{q^*+1}dx$$

$$I=\inf\{\psi(u);\ u\in H_0^1(\Omega,X),\ J(u)=1\},\ I^\infty=(\sup_{x\in\Omega}K(x)^{\frac{2}{q^*+1}})^{-1}S$$

$$S = \inf\{\sum_{j=1}^{l}\|X_j u\|^2_{L^2(\Omega)};\ u \in H^1_0(\Omega, X),\ \|u\|_{L^{q^*+1}} = 1\}$$

我们证明了下面的定理

定理 3[3]　假设 $X=(X_1,\cdots,X_l)$是 Riemann 流形 M 上的一组 r 阶的 Hörmander 向量场,M 的相应于X 的齐性维数 $Q>2$,Ω 是M 的一个光滑有界区域,$\partial\Omega$ 关于X 是非特征的,k、K 满足前面的假设,$\{u_j\}$是 I 的一个极小化序列。

(a) 若 $I<I^\infty$，则 $\{u_j\}$ 是 H^1_0 (Ω, X) 的一个相对紧序列，因此存在极小元 $u \in H^1_0$ (Ω, X)，若 $I>0$，则 u 乘一个常数因子以后是 Dirichlet 问题（3）的一个弱解，此外 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^\mu(\bar{\Omega})$，对于某 $\mu>0$。

(b)若 $I<I^\infty$,则存在非相对紧的极小化序列。

如同在椭圆情形一样,该定理的证明要用到 P. L. Lions 的集中紧致原理,为此我们证明了下面的 C-C 流形上的集中紧致原理。

定理 4[3]　假设$\{u_j\}$是 $H^1_0(\Omega,X)$的一个有界序列,弱收敛于 u,以及$\sum_{k=1}^{l}\|X_k u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \rightharpoonup \mu$, $|u_j|^{q^*+1} \rightharpoonup \upsilon$,这里 μ,υ 是两个非负的有界测度,则:

(a)存在一个(至多)可数集 J,两两互异点集$\{x_i\}_{i\in J}\subset\Omega$,以及$\{\upsilon_i\}_{i\in J}\subset\,]0,+\infty[$,使得

$$\upsilon = |u|^{q^*+1} + \sum_{i\in J}\upsilon_i\delta_{x_i}$$

(b) $\mu \geqslant \sum_{k=1}^{l}|X_k u|^2 + S\sum_{i\in J}\upsilon_i^{\frac{2}{q^*+1}}\delta_{x_i}$,因此$\sum_{i\in J}\upsilon_i^{\frac{2}{q^*+1}} < +\infty$

该定理的证明同样要用到微局部分析理论,因此证明思想和方法是全新的。

参 考 文 献

[1] Jost J, Xu C J. Subelliptic harmonic maps. Trans. AMS., 1997.

[2] Chemin J Y, Xu C J. Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques. Ann. Ecol Norm. Sup., Paris, 1997.

[3] Bahouri H, Cérard P, Xu C J. The concentration-compactness principle in the sub-elliptic calculus of variations. 法国南巴黎大学预印本,1997.

[4] Xu C J, Zuily C. Higher interior regularity for quasilinear subelliptic systems. Calcul. Var. PDE, 1997.

[5] Xu C J. The Dirichlet problem for a class of semilinear subelliptic equations. Nonlinear Anal. Appl., 1997.

[6] Xu C J. Dirichlet problems for the quasilinear second order subelliptic equations. Acta Math. Sinica, 1996, **12**: 18 - 32.

[7] Xu C J, Zhu X S. On the inverse of a class of degenerate elliptic operators. Chinese J. Contemp. Math., 1995, **16**: 261 - 274.

[8] Chemin S Y, Xu C J. Remarque pour la régularités de solutions d'équations du sécond ordre semilinéaire. C. R. A. S., Daris 1997.

[9] Cancelier C, Xu C J. On the Green functions on the Carnot-Carathéodory manifolds. 法国 Reivos 大学预印本,1997.

SOME ADVANCES IN LINEAR AND NON-LINEAR SUBELLIPTIC EQUATIONS

Xu Chaojiang

(*Insititute of Mathematics*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430072)

Key words　Carnot-Carathéodory manifold, harmonic maps, Sobolev embedding, concentrated compactness, Yamabe problem